J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
16 (1981) 93–100

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR GEOMETRIE TRANSNORMALER MANNIGFALTIGKEITEN

B. WEGNER

Transnormale Mannigfaltigkeiten wurden von S. A. Robertson als Verallgemeinerungen der Kurven und Flächen konstanter Breite eingeführt (vgl. [7] und [8]). Eine Reihe von Arbeiten hat die Untersuchung geometrischer und topologischer Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten zum Inhalt. Insbesondere sei auf die Arbeiten [1], [5], [6], [9], [10] und [11] hingewiesen. Dabei blieb bisher die Frage offen, ob im nichtkompakten Fall in euklidischen Oberräumen der Transnormalitätsgrad möglicherweise unendlich sein kann. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß es in euklidischen Räumen keine unendlich transnormalen Mannigfaltigkeiten gibt. Darüber hinaus soll eine nähere Untersuchung der Normalenbündel transnormaler Mannigfaltigkeiten erfolgen. Insbesondere wird sich zeigen, daß die Fokalpunktmenge von M eine schöne Struktur hat.

1. Vorbereitende Bemerkungen

Sei M eine zusammenhängende abgeschlossene C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension m im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n, $\nu(x)$ der Normalenraum von M in x, N das Normalenbündel von M. M heißt *transnormal*, wenn für jedes $x \in M$ die Beziehung $y \in M \cap \nu(x)$, $\nu(x) = \nu(y)$ zur Folge hat, d.h., Normalenräume von M treffen M nur als Normalenräume, wobei die Normalenräume hier als Unterräume des E^n angesehen werden. Faßt man ν als Abbildung von M in die offene Grassmannmannigfaltigkeit der $(n-m)$-dimensionalen affinen Teilräume des E^n auf, so ist ν ein C^∞–Überlagerung auf sein Bild (vgl. [7]). Die Fasern $\nu^{-1}(\nu(x))$ von ν nennt man *transnormale Gerüste* und bezeichnet das transnormale Gerüst durch x mit $\Phi(x)$. Die transnormalen Gerüste von M sind zueinander isometrisch und sie besitzen eine transitiv operierende Gruppe von Isometrien (vgl. [7], [10]). $\Phi(x)$ besteht aus den kritischen Punkten der Abstandsfunktion

Communicated by W. P. A. Klingenberg, October 22, 1979.

mit dem Zentrum x. $\Phi(x)$ ist im kompakten Fall endlich. Daß das auch für den nicht-kompakten Fall gilt, wird sich im Rahmen dieser Arbeit herausstellen.

Der euklidische Zusammenhang $\bar{D}$ des E^n induziert auf dem Tangentialbündel TM und dem Normalenbündel N von M in der üblichen Weise Zusammenhänge D bzw. D^N als Tangential- bzw. Normalanteil. Ein Schnitt ξ in N heißt *parallel* bezüglich D^N, wenn $D^N\xi = 0$ gilt. Ferner heißt N *lokal parallelisierbar* oder *flach* bezüglich D^N, wenn N lokal Basen von parallelen Schnitten besitzt. Analoge Bezeichnungen gelten für Unterbündel von N. Über die Endpunktabbildung $E\colon N \to E^n$, $E(x, v) = x + v$, erhält man als singuläre Werte von E die *Fokalpunkte* von M, d.h. $x + v$ heißt Fokalpunkte von M mit der Basis x, wenn E in (x, v) singulär ist. Für alle Basispunkte in einem transnormalen Gerüst stimmt die Menge der Fokalpunkte überein (vgl. [9]). Für die folgenden Betrachtungen soll N in zwei orthogonale Unterbündel zerlegt werden:

$$N = N_T \oplus N_0,$$

wobei die Fasern von N_T von den transnormalen Gerüsten aufgespannt werden und N_0 das orthogonale Komplement von N_T in N ist. Bezüglich der weiteren Grundlagen sei auf die in den Literaturhinweisen zitierte Standard-Literatur verwiesen. Die verwendenten Ergebnisse über transnormale Mannigfaltigkeiten sind in [9] und [10] ausführlich dargestellt.

2. Normalenbündel von Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Struktur der Fokalpunktmenge transnormaler Mannigfaltigkeiten zu durchleuchten und zu zeigen, daß das Normalenbündel einer transnormalen Mannigfaltigkeiten einen flachen Teil besitzt.

Dazu beweisen wir

Lemma 1. *Für eine transnormale Untermannigfaltigkeit M in E^n seien $\xi_1, \cdots, \xi_k$ lokale C^∞-Schnitte in N_T mit der Eigenschaft, daß für die Endpunktabbildung E für alle $i = 1, \cdots, k$, $E(\xi_i(x)) \in \Phi(x)$ gilt. Dann ist für beliebige Konstanten $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ durch*

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i$$

ein paralleler Schnitt in N gegeben.

Beweis. Für einen beliebegen Tangentialvektor X von M, dessen Basis x im Schnitt der Definitionsbereiche der ξ_i liegt, gelten die Beziehungen

$$\bar{D}_X\xi\,\Big|_x = \bar{D}_X\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\xi_i\right)\Big|_x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{D}_X\xi_i\,\Big|_x = \left(x,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\nabla_X E\circ\xi_i - \nabla_X J)\,\Big|_x\right),$$

wobei ∇_X die Richtungsableitung im E^n in Richtung X und J die Inklusion von M in den E^n bezeichnet. Da die Abbildung $E\circ\xi_i$ voraussetzungsgemäß in M verläuft und insbesondere $E\circ\xi_i\,\big|_x$ in $\Phi(x)$ liegt, erhalten wir aus der Transnormalität von M, daß $\nabla_X E\circ\xi_i\,\big|_x$ zum Tangentialraum von M in x parallel liegt. Damit folgt

$$\left(x,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(D_X E\circ\xi_i - \nabla_X J)\,\Big|_x\right)\in T_xM,$$

d.h., die Projektion von $\bar{D}_X\xi\,\big|_x$ auf N verschwindet: $D^N\xi\,\big|_x = 0$.

Satz 1. *Für eine transnormale Untermannigfaltigkeit M im E^n ist N_T in N lokal parallelisierbar. Insbesondere ist N_T bezüglich des dort induzierten Zusammenhangs flach.*

Beweis. Sie $x_0\in M$, $\{\xi_1(x_0),\cdots,\xi_s(x_0)\}$ eine Basis der Faser $\nu_T(x_0)$ von N_T über x_0, so daß $E(\xi_i(x_0))\in\Phi(x_0)$ für alle $i=1,\cdots,s$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von ν lassen sich die Anfangswerte $\xi_i(x_0)$ zu lokalen C^∞-Schnitten ξ_i von N_T fortsetzen, so daß für alle x in deren Definitionsbereich $\{\xi_1(x),\cdots,\xi_s(x)\}$ eine Basis von $\nu_T(x)$ ist und für alle $\nu = 1,\cdots,s$ $E(\xi_i(x))$ in $\Phi(x)$ liegt. Nach Lemma 1 sind die ξ_i bzgl. des in N induzierten Zusammenhangs parallel, womit Satz 1 bewiesen ist.

Satz 2. *Sie M in E^n transnormal und die Dimension von N_0 höchstens* 1. *Dans ist das Normalenbündel N von M bezüglich des induzierten Zusammenhangs flach.*

Beweis. Ist die Dimension von N_0 0, so gilt $N_T = N$, und damit folgt Satz 2 aus Satz 1 für diesen Spezialfall. Sei nun die Dimension von N_0 1. Nach Satz 1 gibt es linear unabhängige lokale C^∞-Schnitte $\xi_1,\cdots,\xi_{n-m-1}$ ($m =$ Dim M), die bzgl. des Zusammenhangs in N parallel sind. Dieser Zusammenhang wird von einem Riemannschen Zusammenhang induziert, weshalb wir o.B.d.A. die Systeme$\{\xi_i(x),\cdots,\xi_{n-m-1}(x)\}$ für alle x im Definitionsbereich als orthonormiert voraussetzen können. Sei ξ_{n-m} ein lokaler C^∞-Schnitt von N, der zu $\xi_1,\cdots,\xi_{n-m-1}$ senkrecht steht und dessen Bilder die Norm 1 haben; ξ_{n-m} ist bis auf ein Vorzeichen durch diese Forderung eindeutig bestimmt. Dann gilt unter Verwendung der Normalprojektion prn für ein beliebiges x im Definitionsbereich der Schnitte und beliebiges $X \in T_xM$

$$\begin{aligned} D_X^N \xi_{n-m}\Big|_x &= prn\, \bar{D}_X\, \xi_{n-m}\Big|_x = \sum_{i=1}^{n-m} < \bar{D}_X \xi_{n-m}, \xi_i > \xi_i\Big|_x \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} X < \xi_{n-m}, \xi_i > \xi_i\Big|_x - \sum_{i=1}^{n-m} < \xi_{n-m}, \bar{D}_X \xi_i > \xi_i\Big|_x \\ &= -< \xi_{n-m}, \bar{D}_X \xi_{n-m} > \xi_{n-m}\Big|_x \\ &= -\frac{1}{2} X < \xi_{n-m}, \xi_{n-m} > \xi_{n-m}\Big|_x = 0, \end{aligned}$$

da prn $\bar{D}_X \xi_i = D_X^N \xi_i = 0$ für alle $i = 1, \cdots, n - m - 1$. Damit ist gezeigt, daß $\{\xi_1, \cdots, \xi_{n-m}\}$ eine Basis von lokalen C^∞-Schnitten von N bildet, die bezüglich D^N parallel sind.

Interpretation. Es soll hier versucht werden, eine anschauliche Deutung der vorangegangenen Ergebnisse zu geben. Sei $f\colon M \to E^n$ eine isometrische C^∞-Immersion, $N_1(f)$ ein Unterbündel des Normalenbündels $N(f)$ von f, das bezüglich des in $N(f)$ induzierten Zusammenhang lokal parallelisierbar ist. Sei $\xi_{n-m}, \cdots, \xi_{n-m-k+1}$ eine orthomormierte Basis von lokalen C^∞-Schnitten von $N_1(f)$, die durch $\xi_{n-m-k}, \cdots, \xi_1$ zu einer orthonormierten Basis von lokalen C^∞-Schnitten von $N(f)$ ergänzt wird. Sei Ψ eine reguläre Parametrisierung des Definitionsbereichs dieser Schnitte. Dann wird durch

$$F(y_1, \cdots, y_n) = f(\Psi(y_1, \cdots, y_m)) + \sum_{i=1}^{n-m} y_{m+i}\xi_i(y_1, \cdots, y_m)$$

eine lokale Koordinatentransformation des E^n in sich gegeben, die der Immersion angepaßt ist, d.h., Bild von f stellt sich nach Anwendung von F^{-1} lokal als Stück der Ebene $y_{m+1} = 0, \cdots, y_n = 0$ dar. Darüber hinaus bleibt die Metrik in den angepaßten Koordinaten für die letzten k Faktoren euklidisch

$$d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^{n-k} \bar{g}_{ij} dy_i dy_j + \sum_{i,j=n-k+1}^{n} \delta_{ij} dy_i dy_j.$$

Es gilt nämlich für $j > n - k$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} &= \left\langle \nabla_{\partial/\partial y_i} F, \nabla_{\partial/\partial y_j} F \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\partial/\partial y_i} f \circ \Psi + \sum_{e=1}^{n-m} \left(\delta_{i\, m+e}\xi_e + y_{m+e}\bar{D}_{\partial/\partial y_i}\xi_e\right), \xi_{j-m} \right\rangle \\ &= \sum_{e=1}^{n-m} \delta_{i\, m+e}\delta_{e\, j-m} - \sum_{e=1}^{n-m} y_{m+e}\left\langle \xi_e, \bar{D}_{\partial/\partial y_i}\xi_{j-m} \right\rangle = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

da voraussetzungsgemäß

$$\operatorname{prn} \bar{D}_{\partial/\partial y_i}\xi_{j-m} = D^N_{\partial/\partial y_i}\xi_{j-m} = 0.$$

Obige Aussage ist klar aus der Theorie der Raumkurven: Zu jeder regulären Kurve im E^3 existiert ein lokaler Koordinatenwechsel, so daß die Kurve in den neuen Koordinaten lokal als Stück einer Koordinatenlinie erscheint und die transformierte Metrik die Gestalt

$$ds^2 = A\, dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2$$

für eine geeignete positive Funktion A erhält. Satz 1 besagt nun, daß für den von den transnormalen Gerüsten aufgespannten Teil des Normalenbündels einer transnormalen Mannigfaltigkeit eine analoge Aussage gilt.

Eine weitere Interpretation dieser Aussage wird durch das folgende Lemma vorbereitet.

Lemma 2. *Für die C^∞-Immersion f: $M \to E^n$ seien λ_1 und λ_2 Hauptkrümmungen von f in $x \in M$ in Richtung der Einheitsnormalen ξ_1 und ξ_2. Es werde vorausgesetzt, daß λ_1 und λ_2 eine gemeinsame Hauptkrümmungsrichtung v besitzen. Dann ist für beliebige reelle Zahlen α_1 und α_2, $1/c(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)$ Hauptkrümmung von f in Richtung $(1/c)(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)$ mit derselben Hauptkrümmungsrichtung v, wobei $c = \|\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\|$ definiert und $c \neq 0$ vorausgesetzt wird.*

Beweis. Seien $\bar{\xi}_1$ und $\bar{\xi}_2$ Fortsetzungen von ξ_1 und ξ_2 zu C^∞-Normalvektorfeldern in einer Umgebung von x, so daß $c = \|\alpha_1\bar{\xi}_1 + \alpha_2\bar{\xi}_2\|$ gilt. Mit prt werde der Tangentialanteil der auftretenden Vektoren bezeichnet. Dann gilt für die zu den auftretenden Normalen gehörigen Weingartenabbildungen

$$\begin{aligned} A_{(1/c)(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)}(v) &= -prt\, \bar{D}_v\Big(\frac{1}{c}\big(\alpha_1\bar{\xi}_1 + \alpha_2\bar{\xi}_2\big)\Big) \\ &= \frac{1}{c}\big(\alpha_1 A_{\xi_1}(v) + \alpha_2 A_{\xi_2}(v)\big) = \frac{1}{c}(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)v. \end{aligned}$$

Lemma 3. *Seien a_1 und a_2 zwei verschiedene Fokalpunkte der C^∞-Immersion f: $M \to E^n$ mit demselben Basispunkt $x \in M$. Ferner sollen die Weingartenabbildungen zu den Normalen $a_1 - f(x)$ und $a_2 - f(x)$ eine gemeinsame Hauptkrümmungsrichtung zu den Hauptkrümmungen $\|a_1 - f(x)\|^{-1}$ und $\|a_2 - f(x)\|^{-1}$ besitzen. Dann besteht die aus a_1 und a_2 aufgespannte Gerade aus Fokalpunkten von f mit der Basis x.*

Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.

Satz 3. *Sei M eine m-dimensionale transnormale Untermanningfaltigkeit des E^n. Dann läßt sich für jedes $x \in M$ die Menge der Fokalpunkte von M, deren Basis in $\Phi(x)$ liegt und die in $E(\nu_T(x))$ enthalten sind, in ein System von höchstens m Hyperebenen von $E(\nu_T(x))$ zerlegen.*

Beweis. Jeder Fokalpunkt von M mit der Basis x ist nach [9] Fokalpunkt von M mit der Basis y für alle $y \in \Phi(x)$. Damit reduziert sich die Behauptung des Satzes auf Fokalpunkte mit der Basis x. Nach Satz 1 gibt es um x eine Basis von orthonormierten lokalen C^∞-Schnitten von N_T, die bzgl. des in N induzierten Zusammenhangs parallel sind. Damit kommutieren die zu den Werten dieser Schnitte in x gehörigen Weingartenabbildungen von T_xM in sich (vgl. [12]). Das hat zur Folge, daß alle Weingartenabbildungen von T_xM in sich, deren Normale in $\nu_T(x)$ liegt, ein gemeinsames System von Eigenvektoren besitzen. Da diese höchstens m verschiedene Eigenwerte haben können, folgt die Behauptung des obigen Satzes aus Lemma 3.

3. Nichtkompakte transnormale Mannigfaltigkeiten

Für kompakte transnormale Mannigfaltigkeiten folgt aus der elementaren Morse-Theoreie, daß die transnormalen Gerüste endlich sind (vgl. [8]). Bisher ist ungeklärt, ob im nichtkompakten Fall diese Aussage ebenfalls gilt, d.h., daß es keine unendlich-transnormalen Mannigfaltigkeiten gibt. Für den Fall $M = E^1$ wurde dieses Problem in [11] gelöst. Der allgemeine Fall wird im folgenden Satz geklärt.

Satz 4. *Sei M transnormale Untermannigfaltigkeit des E^n. Dann bestehen die transnormalen Gerüste von M aus einer endlichen Zahl von Punkten. (Man beachte, daß M nach den Generalvoraussetzungen in* §1 *vollständig ist!)*

Beweis. O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß M in keiner Hyperebene des E^n enthalten ist. Für $x \in M$ besteht $\Phi(x)$ aus den kritischen Punkten der Abstandsfunktion L_x mit dem Zentrum x, die zudem sämtlich nichtdegeneriert sind (vgl. [7]). Sei $\Phi_0(x)$ die Menge der relativen Minima von L_x. Dann gilt $x \in \Phi_0(x)$ und $\Phi_0(x) \subset \Phi(x)$. Ferner liegt $\Phi_0(x)$ in dem konvexen Bereich $\tilde{K}(x)$ von $E(\nu_T(x))$, der von den Fokalhyperebenen (vgl. Satz 3) in $E(\nu_T(x))$ begrenzt wird und x enthält. Für $x, y \in M$ sind $\Phi_0(x)$ und $\Phi_0(y)$ zueinander isometrisch, da die Isometrien zwischen den transnormalen Gerüsten (vgl. [7]) für die kritischen Punkte der jeweiligen Abstandsfunktionen indexerhaltend sind. $E(\nu_T(x))$ wird durch die aus den Fokalpunkten mit der Basis x gebildeten Fokalhyperebenen in höchstens endlich viele konvexe Bereiche zerlegt. Daraus folgt, daß $\Phi(x)$ endlich ist, wenn $\Phi_0(x)$ endlich ist, und umgekehrt. In diesem Fall ist die Behauptung von Satz 4 bewiesen.

Nehmen wir also an, daß $\Phi_0(x)$ abzählbar unendlich viele Punkte enthält. Mehr können es nicht sein, da die Punkte von $\Phi(x)$ isoliert liegen. Sei $K(x)$ der von $\Phi_0(x)$ aufgespannte konvexe Bereich. Nach [7], [10] läßt auch $\Phi_0(x)$

eine transitiv operierende Gruppe G von Isometrien zu. Die Elemente von G lassen dann $K(x)$ invariant. Damit bleiben für $K(x)$ die Alternativen, daß $\Phi_0(x)$ nur aus Randpunkten der konvexen Menge $K(x)$ besteht oder daß $K(x)$ ein affiner Unterraum von $E(\nu_T(x))$ ist, der keine der Fokalebenen in $E(\nu_T(x))$ trifft, da nach [7] $\Phi_0(x)$ keine Fokalpunkte von M mit der Basis x enthält. Im zweiten Fall gibt es ein $q \in \Phi_0(x)$, $q \neq x$, so daß die Verbindungsgerade von x mit q keinen Fokalpunkt von M mit der Basis x enthält. Sei v die Normale von M in x mit der Eigenschaft $E(v) = q$. v ist dann totalgeodätische Richtung von M in x (–womit gemeint ist, daß die zweite Fundamentalform von M in x in Richtung v verschwindet).

Aus Isometriegründen kann man v zu einem lokalen C^∞-Schnitt ξ in einer Umgebung von x fortsetzen, der ebenfalls totalgeodätisch ist und für den $E(\xi(y)) \in \Phi(y)$ für alle y aus dieser Umgebung gilt. Nach Lemma 1 ist ξ parallel bzgl. des induzierten Zusammenhangs in N. Damit ist $\bar{D}\xi = 0$, woraus folgt, daß der Definitionsbereich von ξ in einer Hyperebene H von E^n enthalten ist. Die Menge, in der sich ξ mit den angegebenen Eigenschaften definieren läßt, ist offensichtlich zugleich offen und abgeschlossen. Damit erhält man mit dem üblichen Zusammenhangsargument, daß ganz M in H enthalten ist, was im Widerspruch zu unserer Ausgangsvoraussetzung in diesem Beweis steht.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß $\Phi_0(x)$ auf dem Rand von $K(x)$ liegt. Sei A der von $\Phi_0(x)$ aufgespannte affine Unterraum von $E(\nu_T(x))$ und S eine Einheitssphäre in A. Für $q \in \Phi_0(x)$ und $R > 0$ sei $U_R(q)$ die Menge der Punkte auf der Oberfläche von $K(x)$, die von q höchstens den Abstand R haben, und $W(q)$ die Menge der Stütznormalen von $K(x)$ in den Punkten von $U_R(q)$. Aus Isometriegründen ist das Maß m_q von $W(q)$ von q unabhängig. Da $\Phi_0(x)$ nicht endlich ist und seine Punkte isoliert liegen, gibt es eine Folge $\{q_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ aus $\Phi_0(x)$, so daß die $U_R(q_i)$ paarweise disjunkt sind. Damit sind auch die $W(q_i)$ bis auf Mengen vom Maß Null in S paarweise disjunkt. Andererseits ist das Maß der Vereinigung der $W(q_i)$ durch die Oberfläche von S beschränkt, woraus wegen der Unabhängigkeit von m_q von $q \in \Phi(x) m_q = m_{q_i} = 0$ folgt. Da $R > 0$ beliebig war, ist damit gezeigt, daß die Stütznormalen von $K(x)$ einen Bereich W in S überstreichen, der das Maß Null besitzt und gegenüber den durch G auf S induzierten Isometrien invariant ist. Ferner ist W in S konvex, d.h., W ist in einer totalgeodätischen Hypersphäre $\tilde{S}$ von S enthalten. Da $K(x)$ A aufspannt, muß für eine zu $\tilde{S}$ senkrechte Richtung v die Gerade $l = \{x + tv \mid t \in R\}$ in $K(x)$ verlaufen. Sie trifft also keine Fokalpunkte von M mit der Basis x, wie schon weiter oben eingesehen wurde. Damit haben wir wiederum eine totalgeodätische Richtung von M in x gefunden, die sich aus Verbindungsrichtungen zwischen Punkten von $\Phi(x)$

linear kombinieren läßt. Mit dem obigen Fortsetzungsargument, folgt daraus dann ein Widerspruch dazu, daß M in keiner Hyperebene von E^n enthalten ist.

Folgerung 1. Eine transnormale Mannigfaltigkeit hat den Homotopietyp eines endlichen Zellkomplexes. Diese Behauptung folgt aus Satz 4 und der Tatsache, daß $\Phi(x)$ aus den kritischen Punkten der Abstandsfunktion mit dem Zentrum x besteht, wobei diese sämtlich nicht degeneriert sind (vgl. [7]).

Bemerkung. Für den Fall einer zweidimensionalen orientierbaren transnormalen Mannigfaltigkeit erhält man aus der obigen Folgerung, daß sie zu einer 2-Sphäre mit endlich vielen Löchern und Henkeln homöomorph ist. Im allgemeinen Fall übertragen sich alle Aussage über die transnormalen Gerüste in [7], [8] und [10], die nicht von der Kompaktheit der Mannigfaltigkeit Gebrauch machen, sondern nur von der Endlichkeit der transnormalen Gerüste.

Folgerung 2. Eine transnormale Mannigfaltigkeit der Kodimenion 1 ist 1- oder 2-transnormal. Diese Behauptung folgt aus Satz 4 und der Tatsache, daß dann als Isometriegruppen nur noch zyklische Gruppen vorkommen, deren Ordnung höchstens 2 ist.

Folgerung 3. Eine zweidimensionale transnormale Mannigfaltigkeit im E^3 ist eine konvexe Fläche konstanter Breite, eine 1-transnormale Ebene oder ein 2-transnormaler Zylinder.

Literaturverzeichnis

[1] J. Bolton, *Transnormal hypersurfaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **74** (1973) 43–48.

[2] N. Hicks, *Notes on differential geometry*, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[3] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vols. I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.

[4] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[5] S. Nishikawa, *Transnormal hypersurfaces–Generalized constant width for Riemannian manifolds–*, Tôhoku Math. J. **25** (1973) 451–459.

[6] ______, *Compact two-transnormal hypersurfaces in a space of constant curvature*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974) 625–635.

[7] S. A. Robertson, *Generalized constant width for manifolds*, Mich. Math. J. **11** (1964) 97–105.

[8] ______, *On transnormal manifolds*, Topology **6** (1966) 117–123.

[9] B. Wegner, *Krümmungseigenschafter transnormaler Mannigfaltigkeiten*, Manuscripta Math. **3** (1970) 375–390.

[10] ______, *Decktransformationen transnormaler Mannigfaltigkeiten*, Manuscripta Math. **4** (1971) 179–199.

[11] ______, *Transnormale Isotopien und transnormale Kurven*, Manuscripta Math. **4** (1971) 361–372.

[12] K. Yano & S. Ishihara, *Submanifolds with parallel mean curvature vector*, J. Differential Geometry **6** (1971) 95–118.

Technische Universität Berlin